Aksjomaty ekstremalne i modele zamierzone teorii

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Uprzejmie dziękuję za zaproszenie do wygłoszenia tego odczytu.[1] Jestem zaszczycony, że mogę przemawiać przed tak znakomitym audytorium. Jednocześnie jestem wielce speszony, by nie rzec przerażony (ale będę to skrzętnie ukrywał). Pierwotny tekst tego odczytu był całkowicie różny od tego, co wygłoszę. Po przeczytaniu abstraktów innych wystąpień na niniejszej konferencji zmieniłem planowaną *treść* odczytu, pozostawiając jego *temat*, a usuwając prawie wszystkie bardziej złożone dywagacje matematyczne, zgodnie z oczekiwaniami słuchaczy, jak sądzę.

Moim pierwszym obowiązkiem jest próba uzasadnienia tego, dlaczegóż to ktokolwiek z kognitywistów miałby być zainteresowany tematem odczytu. Mowa będzie o możliwościach (dostępnych w logice oraz matematyce) *jednoznacznego* wyznaczenia odniesienia przedmiotowego teorii. Ograniczymy się do wybranych teorii matematycznych o bardzo szerokich walorach aplikacyjnych, używanych praktycznie w każdym rodzaju działalności badawczej. Pojęcia, do których odnoszą się te teorie to:

- *liczenie, liczba* (naturalna, całkowita, wymierna, rzeczywista, zespolona);
- *kształt, figura, bryła, obiekt geometryczny* (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń);
- *dyskretność, ciągłość* (pewne własności porządków, tworów algebraicznych, obiektów geometrycznych);
- *zbiór, kolekcja, mnogość, klasa przedmiotów* (ujmowanie w całość zestawów przedmiotów, własności rozumiane ekstensjonalnie).

[1] Tekst odczytu wygłoszonego 3 grudnia 2010 roku podczas 4 Poznańskich Kolokwiów Kognitywistycznych, na zaproszenie Polskiego Towarzystwa Kognitywistycznego i Instytutu Psychologii UAM.

Studia z Kognitywistyki i Filozofii Umysłu, **6(1)**: 5–36, 2011

Pozwalam sobie sądzić, iż audytorium zgodzi się, że istotnie nauki kognitywne posługują się wymienionymi pojęciami. Może zatem chwila refleksji *metodologicznej* nad możliwościami precyzyjnego (w ściśle określonym sensie *jednoznacznego*) określenia tworów, o których mówią teorie dotyczące tych pojęć nie będzie dla słuchaczy czasem zmarnowanym. W szczególności, może niniejsze rozważania zachęcą przedstawicieli nauk kognitywnych do powiązania rozważań metateoretycznych z konkretnymi ustaleniami, dotyczącymi np.: tworzenia pojęć, percepcji, złudzeń poznawczych, roli intuicji w poznaniu, itd.

Kurt Gödel pisał, iż jesteśmy wyposażeni w pewną zdolność, pozwalającą percypować obiekty matematyczne. Przekonanie to wiązał z wyznawaną przez siebie postawą *platońską* w matematyce: wiarą w istnienie świata obiektów matematyki, którego nie możemy tworzyć lub zmieniać, ale który możemy percypować oraz opisywać. Matematyka opisuje więc pewną rzeczywistość pozazmysłową (*non-sensual*), do której umysł ma dostęp jedynie ograniczony, a istotną rolę w owym dostępie odgrywają nie tylko metody dedukcyjne, ale także *intuicja matematyczna.* Patrząc z funkcjonalnego punktu widzenia, regulatorami naszych intuicji są *paradoksy.* To między innymi one współodpowiedzialne zdają się być za *zmiany* naszych intuicji, przynajmniej intuicji *matematycznych.*

Nasze dalsze rozważania dotyczyć będą *współczesnych* ustaleń w podstawach matematyki. Nie odwołujemy się więc do stanowisk w filozofii (epistemologii) matematyki w jej historycznym rozwoju. Nadto, tylko w paru przypadkach pozwolimy sobie na uwagi historyczne, m.in. w porównaniu porządku historycznego rozwoju pojęć z (obecnie ustalonym) porządkiem logicznym między nimi. Na marginesie: z punktu widzenia kognitywisty ciekawe wydaje się porównanie porządku przyswajania sobie określonych pojęć matematycznych w rozwoju poznawczym jednostki z ich uporządkowaniem wedle zasad logicznych. Innym interesującym problemem – zarówno dla matematyka, jak i dla kognitywisty – jest może zagadnienie matematycznej rekonstrukcji *reprezentacji poznawczych świata.* Pytamy np. jak informacje olfaktoryczne u tych Braci Mniejszych, dla których zmysł węchu ma priorytet nad percepcją wzrokową, przekładają się na budowanie przez nich reprezentacji przestrzennych. Matematyk chciałby zapewne, aby użyć w tym kontekście jakiegoś *izomorfizmu* (odwzorowania zachowującego strukturę). Jednak dopiero ustalenia kognitywisty, który wykryje struktury w porównywanych kanałach percepcyjnych umożliwią matematykowi jego robotę formalną.

Jak się domyślam, naukom kognitywnym nie jest obce stosowanie *eksperymentów myślowych.* Być może próby zastanowienia się nad poniższymi przykładowymi pytaniami - które uważam właśnie za eksperymenty myślowe - pozwoliłyby na spojrzenie z nowej perspektywy na niektóre aspekty podstaw matematyki:

1. Jaką *geometrię* budowałyby inteligencje, które miałyby dostęp poznawczy jedynie do ciał lotnych (albo jedynie do cieczy) i same również byłyby takimi ciałami? Czy rozpoczęłyby od *ogólnych przestrzeni topologicznych*, geometrię ciał sztywnych traktując jedynie jako przykłady *świata urojonego*? Podobne pytania zadawać można oczywiście także w odniesieniu do hipotetycznych inteligencji, które za swój Wszechświat miałyby, powiedzmy, strukturę *dyskretną* (w takiej żyją chyba przecież komputery, które zapraszamy do przejścia testu Turinga), lub strukturę pod względem topologicznym jeszcze inną.
2. Operacja mnożenia w podstawowych (używanych przez nas) ciałach liczbowych (liczby wymierne, rzeczywiste, zespolone) jest przemienna. Jakie otoczenie poznawcze (powiedzmy, określonego wymiaru topologicznego) sprzyjać mogłoby uznaniu (przez jakąś inteligencję) za podstawowy *nieprzemiennego* systemu liczbowego (jak np. algebra kwaternionów)? Algebry nieprzemienne znajdują zastosowania np. do opisu świata na poziomie kwantowym, jak wiadomo.
3. Niektóre idee matematyczne pozostają prawie *niezmienne* lub są *rozszerzane* (np. liczba), inne podlegają *ewolucji* (np. poglądy dotyczące kontinuum geometrycznego). Uważa się, że zasady logiki są najtrwalsze. Dlaczego jednak to właśnie logika *klasyczna* od samego początku zajmuje tak wyróżnioną pozycję, a nie np. (pod wieloma względami „lepsza") logika *intuicjonistyczna*? Czy powodowane to było jakąś koniecznością poznawczą?
4. O ile wiadomo, *nieskończoność aktualna* nie jest w jakikolwiek sposób obecna w otaczającym nas świecie fizycznym. Z drugiej strony, prawie cała matematyka klasyczna bez nieskończoności aktualnych obejść się nie może. *Matematyka jest logiką Nieskończonego* – pisał Ernst Zermelo. Czy posługiwanie się pojęciem *nieskończoności aktualnej* oznacza osiągnięcie jakiegoś znaczącego na drabinie inteligencji szczebla (wyżej od Arystotelesa)? Jaki mógłby być szczebel *następny*? Czemu służy, z ewolucyjnego punktu widzenia, ich osiąganie? Nasi Bracia Mniejsi używają systemów komunikacji (czasem odważnie mówi się nawet w tym przypadku o *językach*). Podobno korzystają w jakimś zakresie z *finitarnej* matematyki. Czy jednak matematyka *infinitarna* może być dla nich dostępna?

5. Już po ugruntowaniu prawie całej matematyki na bazie teorii mnogości okazało się, że pewne ważne jej zdania (w istocie, w znaczącej liczbie) to zdania niezależne od aksjomatów. Dla przykładu, można teoretycznie uprawiać matematykę zarówno z założeniem prawdziwości hipotezy kontinuum, jak i przy założeniu jej fałszywości. Nadto, pewne ważne dla praktyki matematycznej zdania są wzajem sprzeczne, będąc jednocześnie niezależnymi od pozostałych aksjomatów teorii mnogości (dla przykładu: aksjomat wyboru oraz aksjomat determinacji albo postulat głoszący, że wszystkie zbiory są *konstruowalne* (w sensie Gödla) oraz zdanie stwierdzające *mierzalność* (w sensie Lebesgue'a) wszystkich rzutowych zbiorów liczb rzeczywistych). Jaka matematyka jest zatem wyróżniona przez nasze zdolności poznawcze? Co miałoby o tym decydować: praktyka? Jeśli takie wyróżnienie jednej, *jedynie słusznej* matematyki nie jest możliwe, to czy matematyka (a właściwie różne matematyki) nie uzyskuje wtedy statusu podobnego jak *sztuka*?

Używamy tu terminów *teoria* oraz *model* w znaczeniu przyjętym w logice matematycznej. Modele możemy porównywać m.in. w aspekcie *algebraicznym* lub *semantycznym*. Dwa modele są *izomorficzne* jeśli są nieodróżnialne pod względem budowy (struktury, abstrahując od „jakości" elementów ich dziedzin). Dwa modele są *elementarnie równoważne*, gdy prawdziwe są w nich dokładnie te same zdania (języka rozważanej teorii). Teoria jest *kategoryczna*, gdy wszystkie jej modele są izomorficzne. Teoria jest *zupełna*, gdy wszystkie jej modele są elementarnie równoważne. Tak rozumiana zupełność zgodna jest z określeniem teorii T jako *zupełnej*, gdy dla dowolnego zdania ψ jej języka, albo ψ ma dowód w T, albo $\neg\psi$ ma dowód w T.

Zarówno izomorficzność, jak i elementarna równoważność to relacje *globalne*, odwołujące się do całych modeli. Rozważa się także różnego rodzaju relacje między modelami, odwołujące się do własności *lokalnych* (np. istnienie rodzin *częściowych* izomorfizmów lub *realizowanie* typów).

Kategoryczność oraz zupełność teorii to pewne ideały metodologiczne, między innymi w tych przypadkach, gdy chcemy, aby jakieś modele rozważanej teorii były *wyróżnione*. Teoria kategoryczna opisuje „tak naprawdę" dokładnie jeden model, przynajmniej tak widzi to matematyk, dla niego modele teorii kategorycznej są nieodróżnialne. Z kolei, modele teorii zupełnej są „takie same" ze względu na *wszystko to*, co w rozważanej teorii można o nich powiedzieć. Dla przykładu: zbiór wszystkich liczb naturalnych wraz z operacją następnika rozumianą jako „dodanie jedynki" jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb parzystych wraz z operacją następnika rozumianą jako „dodanie dwójki". Z drugiej strony, pierwszy z tych zbiorów nie jest oczywiście izomorficzny ze zbiorem złożonym z kopii zbioru wszystkich liczb naturalnych, po którym następuje kopia zbioru wszystkich liczb całkowitych, gdzie operację następnika także rozumiemy jako „dodanie jedynki". Jednak te dwie struktury, choć odróżnialne pod względem budowy (w tym przypadku: uporządkowania elementów), są w języku pierwszego rzędu (czyli języku logiki klasycznej) *semantycznie nieodróżnialne*, prawdziwe są w nich dokładnie te same zdania języka logiki pierwszego rzędu. W ogólności, kategoryczność implikuje elementarną równoważność, lecz nie na odwrót.

Teorie matematyczne dzieli się czasem na dwa rodzaje: jedne z nich tworzone były dla opisania jakiejś wybranej, ustalonej struktury matematycznej (np. arytmetyka liczb naturalnych, geometria euklidesowa), inne dla opisu całej klasy struktur (np. teoria grup lub teoria ogólnych przestrzeni topologicznych). W dzisiejszym odczycie interesują nas teorie pierwszego z tych rodzajów, które jakoś jednoznacznie miałyby charakteryzować ustaloną pojedynczą dziedzinę obiektów matematycznych wraz z łączącymi je zależnościami. W odniesieniu do teorii drugiego rodzaju dodajmy jedynie, że istotną rolę odgrywają tu *twierdzenia o reprezentacji*, pokazujące, że na wszystkie rozważane modele odnośnej teorii patrzeć można jako na struktury określonej postaci. Dla przykładu, *twierdzenie Cayleya* głosi, że każda grupa jest izomorficzna z pewną grupą permutacji, a *twierdzenie Stone'a* stwierdza, iż każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem zbiorów.

Model zamierzony teorii miałby być modelem wyróżnionym spośród wszystkich jej modeli przez fakt, że to właśnie z myślą o jego charakterystyce teoria była budowana. Określenie to zawiera oczywiście element *pragmatyczny* – jak się okazuje – nieusuwalny. W przypadku ważnych teorii matematycznych formułowanych w języku pierwszego rzędu (systemy liczbowe badane w arytmetyce i algebrze, teoria mnogości) ich modele *zamierzone* nie mogą zostać jednoznacznie wyznaczone ani środkami syntaktycznymi, ani semantycznymi. Pokazują to *twierdzenia limitacyjne*. Niekiedy pożądane charakterystyki otrzymujemy wychodząc *poza* klasyczną logikę pierwszego rzędu, ale płacimy wysoką cenę – tracimy np. własność *pełności* wykorzystywanej logiki, czyli, mówiąc metaforycznie, „ufność w jej możliwości inferencyjne". Do związku między możliwością jednoznacznego wyznaczenia modeli zamierzonych a „mocą wyrażania" języka teorii jeszcze wrócimy.

Aksjomaty ekstremalne formułowane bywały m.in. właśnie w celu jednoznacznej charakterystyki modeli zamierzonych. Aksjomaty ekstremalne miały być warunkami, które wyróżniają pewne modele teorii jako pod ustalonymi względami *minimalne* lub *maksymalne*. Nie chodziło przy tym jedynie o wielkość uniwersum modelu, ale także o „bogactwo" jego struktury.

Najbardziej znane przykłady aksjomatów ekstremalnych to: *aksjomat zupełności* Hilberta w geometrii (zastąpiony później *aksjomatem ciągłości*, wykorzystywanym w teorii liczb rzeczywistych), *aksjomaty ograniczenia* (minimalności) w teorii mnogości (Fraenkel, Gödel, Suszko, Myhill), *schemat aksjomatu indukcji* w arytmetyce Peana, *aksjomaty maksymalności* w teorii mnogości (aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych). Aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości zostały odrzucone, natomiast aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych okazują się ściśle związane z *dowodliwością*, także w logikach mocniejszych od logiki pierwszego rzędu.

Resztę odczytu poświęcimy kilku przykładom modeli zamierzonych wybranych teorii oraz związanych z nimi aksjomatów ekstremalnych. Nasze przykłady dotyczą:

- modelu standardowego arytmetyki oraz schematu indukcji;
- liczb rzeczywistych oraz aksjomatu ciągłości, wraz z dygresją na temat geometrii oraz aksjomatu zupełności;
- teorii mnogości oraz aksjomatów ograniczenia i aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych.

Czasami możemy modele zamierzone powiązać z własnościami czysto matematycznymi: np. *twierdzenie Tennenbauma* głosi, że model standardowy arytmetyki jest jej jedynym modelem *rekurencyjnym*. Jak wiadomo, model standardowy arytmetyki jest jej modelem *pierwszym*, jest też jej jedynym modelem *dobrze uporządkowanym*. Twierdzenia *Frobeniusa, Ostrowskiego, Pontriagina* orzekają o jednoznacznej (z dokładnością do izomorfizmu) charakterystyce pewnych ważnych systemów liczbowych, gdy uwzględnimy ich własności arytmetyczne, porządkowe oraz topologiczne. Własność *ciągłości* jest istotna w dowodzie kategoryczności geometrii *euklidesowej* oraz geometrii *Łobaczewskiego* (rozważanych w języku drugiego rzędu) oraz w ustaleniu zupełności systemu *Tarskiego* geometrii elementarnej.

W omawianych niżej przykładach odwołamy się do – bardziej lub nieco mniej znanych – twierdzeń *metateoretycznych*, a więc głoszących coś o rozważanych teoriach lub systemie logiki, w którym są one formułowane. Zakładamy, że słuchacze spotkali się już z przykładami metatwierdzeń podczas elementarnego kursu logiki; takimi twierdzeniami są np.:

1. *Twierdzenie o pełności.* Logika pierwszego rzędu jest *pełna*: zbiór jej tez pokrywa się ze zbiorem jej tautologii.

2. *Twierdzenie o zwartości.* Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru T zdań języka logiki pierwszego rzędu ma model, to również T ma model.
3. *Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego.* Niesprzeczna teoria T w języku logiki pierwszego rzędu bez modeli skończonych ma modele dowolnej mocy nieskończonej.

Na mocy ostatniego z wymienionych twierdzeń żadna teoria niesprzeczna w języku pierwszego rzędu (oprócz teorii identyczności) nie może być kategoryczna. Rozważa się jednak bardziej subtelne pojęcie: teoria T jest *kategoryczna w mocy* κ, gdy wszystkie jej modele mocy κ są izomorficzne.

1. Liczby naturalne i schemat indukcji

Pojęciami pierwotnymi współczesnej aksjomatycznej arytmetyki pierwszego rzędu (nazywanej PA) są: zero, operacja następnika, operacje dodawania i mnożenia. Pojęcia te są charakteryzowane przez aksjomaty, które podamy tu bez użycia zapisu symbolicznego:

1. Różne liczby mają różne następniki.
2. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby.
3. Wynik dodania zera do danej liczby jest równy tej liczbie.
4. Wynik dodania następnika liczby y do liczby x jest równy następnikowi sumy $x + y$.
5. Iloczyn zera i danej liczby jest równy zero.
6. Iloczyn liczby x oraz następnika liczby y jest równy sumie: iloczynu $x \cdot y$ oraz liczby x.
7. Dla dowolnej własności liczb naturalnych wyrażonej formułą języka PA z jedną zmienną wolną, jeśli liczba zero ma tę własność oraz to, że liczba x ma tę własność implikuje, że również następnik liczby x ma tę własność, to wszystkie liczby naturalne mają tę własność.

Ostatnia na tej liście jest *zasada indukcji matematycznej.* Nie jest to pojedynczy aksjomat, lecz schemat nieskończenie wielu aksjomatów. Zauważmy, że zasada indukcji matematycznej jest pewnym warunkiem *minimalności* nałożonym na interpretacje powyższego systemu aksjomatów. Udowodniono, że zasady tej nie można zastąpić żadną (równoważną z nią) *skończoną* liczbą aksjomatów. Nie można też ograniczyć złożoności formuł występujących w schemacie indukcji, żądając jednocześnie, aby otrzymany system był równoważny z PA.

Powyższe aksjomaty „mówią” zatem: o uporządkowaniu liczb naturalnych za pomocą operacji następnika (dyskretny liniowy porządek z elementem pierwszym i bez elementu ostatniego), o wynikach działań arytmetycznych dodawania i mnożenia liczb oraz o wszelkich własnościach, które mogą zostać wyrażone w języku teorii PA.

Z powyższych aksjomatów (oraz aksjomatów logiki i aksjomatów dla identyczności) wyprowadza się, na mocy reguł logiki, twierdzenia arytmetyki. Można również dowieść, że wszystkie twierdzenia arytmetyki są prawdami arytmetycznymi, czyli zachodzą w tzw. *modelu standardowym* arytmetyki: strukturze, której uniwersum tworzą wszystkie liczby naturalne (i tylko one), wraz z „naturalnie” rozumianymi operacjami: następnika, dodawania i mnożenia (zdefiniowanymi przez znane funkcje rekurencyjne).

Na pytanie: *czym są liczby naturalne* (a więc elementy uniwersum modelu standardowego) można odpowiedzieć, iż są to *dowolne* obiekty, spełniające powyższe aksjomaty. Można też *zdefiniować* liczby naturalne w teorii mnogości, np. znaną metodą von Neumanna.

Jednak odpowiedź na pytanie, czy *wszystkie* prawdy arytmetyczne (czyli zdania prawdziwe w modelu standardowym) są twierdzeniami tego systemu arytmetyki jest przecząca. Nie chodzi przy tym, podkreślmy, o fakt, iż całkiem *dowolnych* zbiorów liczb naturalnych jest kontinuum, czyli istotnie więcej niż zdań arytmetyki, których jest tylko przeliczalnie wiele, a ktoś mógłby argumentować, że każdy taki zbiór „przedstawia” jakąś prawdę arytmetyczną. Można mianowicie *wskazać* (skonstruować) zdania arytmetyki prawdziwe w modelu standardowym, które nie są dowodliwe w systemie aksjomatycznym PA, co więcej, nie są w tym systemie *rozstrzygalne* (czyli także ich negacje nie mają w PA dowodu). Oczywiście, trzeba przy tym *zakładać* niesprzeczność samej PA; w systemie sprzecznym dowieść można *wszystkiego*.

O tych wynikach metamatematycznych każdy wykształcony obywatel chyba coś słyszał. Przypomnijmy, chodzi m.in. o następujące twierdzenia (wszystkie przy założeniu, iż PA jest niesprzeczna):

1. *Twierdzenie Gödla o Niezupełności, Twierdzenie Rossera.* Teoria PA jest niezupełna i nierozstrzygalna.
2. *Twierdzenie Gödla o Niedowodliwości Niesprzeczności.* W PA nie można udowodnić niesprzeczności PA.
3. *Twierdzenie Tarskiego.* Predykat prawdziwości (w modelu standardowym) nie jest definiowalny w PA.

Takich oraz o wiele mocniejszych wyników uzyskano bardzo wiele. Jakie mają one konsekwencje dla możliwości jednoznacznej charakterystyki modelu zamierzonego arytmetyki? Po pierwsze, PA nie jest ani kategoryczna, ani zupełna: jej modelu standardowego nie można określić ani z dokładnością do izomorfizmu (czyli budowy modelu), ani ze względu na jego własności semantyczne, czyli to, co można o standardowych liczbach naturalnych powiedzieć w języku PA. Ponadto, PA, o ile jest niesprzeczna, ma w *każdej* mocy nieskończonej κ maksymalną możliwą liczbę wzajemnie elementarnie nierównoważnych modeli tej mocy, czyli 2^{κ}. W szczególności, PA ma zatem kontinuum elementarnie nierównoważnych modeli przeliczalnych. Istnieje więc kontinuum nierównoważnych semantycznie maksymalnych niesprzecznych zbiorów *prawd arytmetycznych w sensie szerszym*, czyli zbiorów prawd związanych z poszczególnymi przeliczalnymi modelami arytmetyki PA. Modele różne od standardowego nazywamy *niestandardowymi*.

Jedna rzecz wymaga tu może wyjaśnienia. Wszystkie przeliczalne niestandardowe modele arytmetyki mają ten sam *typ porządkowy* $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta$, czyli uporządkowanie (ze względu na operację następnika) wygląda tak: najpierw występuje kopia standardowych liczb naturalnych (w ich zwykłym porządku), a następnie tyle kopii zbioru wszystkich liczb całkowitych (w ich zwykłym porządku), ile jest wszystkich liczb wymiernych (w ich zwykłym porządku). To, co różni poszczególne modele niestandardowe to zatem sposób określenia w nich dodawania oraz mnożenia. Wspomniane już twierdzenie Tennenbauma głosi zatem, że model standardowy jest wyróżniony ze względu na fakt, iż tylko w nim *obie* operacje — dodawanie i mnożenie — są rekurencyjne. Definicje operacji arytmetycznych w modelach niestandardowych muszą zatem zawierać kwantyfikatory nieograniczone. Skoro uniwersum modelu niestandardowego zawiera elementy *nieskończone* (liczby *niestandardowe*), to nie jest niczym zaskakującym, że operacje arytmetyczne na tych elementach muszą mieć bardziej skomplikowane definicje, umykające *naszym* prostym intuicjom, związanym z obliczalnością. Wdzięcznym tematem do spekulacji jest np. rozważanie inteligencji, których arytmetyka związana byłaby z prawdami jakiegoś modelu niestandardowego.

Jeśli rozszerzymy PA przez dodanie do niej infinitarnej *ω-reguły*, to otrzymamy teorię zupełną. Przypomnijmy, ω-reguła pozwala z nieskończonego zbioru przesłanek $\{\psi(\overline{n}) : n \in \omega\}$ otrzymać wniosek generalny $\forall x\ \psi(x)$. Mając tę regułę, możemy *udowodnić* zasadę indukcji.

Zauważmy, że twierdzenie Tennenbauma podaje czysto *matematyczną* charakterystykę modelu standardowego, a więc także modelu *zamierzonego* arytmetyki. Model ten ma jeszcze inne cechy, odróżniające go od pozostałych, niestandardowych modeli: jest modelem *pierwszym* (może zostać elementarnie włożony w każdy inny model arytmetyki), jest jedynym modelem *dobrze uporządkowanym*. Są to jednak wyróżniki ustalane na poziomie *metateorii*, gdzie możemy mówić o wszystkich modelach arytmetyki. Sama arytmetyka PA nie dostarcza ani syntaktycznych, ani semantycznych metod wyróżnienia modelu standardowego spośród innych.

Niestandardowe liczby naturalne umożliwiają jednoznaczne *kodowanie* nieskończonych zbiorów liczb naturalnych. Ponadto, skoro mamy matematyczny odpowiednik wielkości liczbowej *nieskończenie dużej*, to otrzymać możemy także taki odpowiednik dla wielkości liczbowej *nieskończenie małej*, a ten fakt ma podstawowe znaczenie np. w *analizie niestandardowej*, gdzie o takich wielkościach mówimy.

Rozważa się szereg innych jeszcze form zasady indukcji. Bada się także, „ile indukcji jest potrzebne" do otrzymania określonych części arytmetyki, ograniczając złożoność kwantyfikatorową formuł występujących w schemacie indukcji. Dla przykładu, konstrukcja funkcji rekurencyjnych oraz korzystanie ze schematu rekursji prostej wymaga schematu indukcji dla Σ_1-formuł.

Aksjomat indukcji u Peana (1889) oraz Dedekinda (1888) ma postać formuły drugiego rzędu, przy czym Dedekinda nie interesowały aspekty *logiczne* jego systemu. Liczby naturalne w jego *Was sind ud was sollen die Zahlen?* definiowane są jako *najmniejszy* zbiór nieskończony N z elementem wyróżnionym 1 wyposażony w funkcję $f : N \to N$, do której przeciwdziedziny nie należy 1 i taki, że N jest domknięty względem f. Podobną funkcję wraz z warunkiem domkniętości wykorzystywał Frege (1884).

Wcześniej spotykamy aksjomat indukcji w *Lehrbuch der Arithmetik* Grassmana (1861), który definiował liczby naturalne jako (w dzisiejszej terminologii) uporządkowaną dziedzinę całkowitości, w której każdy niepusty zbiór elementów dodatnich ma element najmniejszy.

Uważa się (Meschkowski), że aksjomatem indukcji posługiwał się Pascal, a jego ogólne sformułowanie znajdujemy u J. Bernoulliego. Jednak już matematycy w starożytnej Grecji znali zasadę *nieskończonego regresu*: aby pokazać, że żadna liczba nie ma własności ψ wystarczy pokazać, że dla każdej liczby n mającej własność ψ istnieje liczba $m < n$, która posiada własność ψ. Gdyby więc istniała liczba o własności ψ, to moglibyśmy otrzymywać coraz to mniejsze liczby o własności ψ, co odrzucano jako absurdalne. Później zasadę tę odkrył na nowo Fermat.

Zwróćmy uwagę na następującą asymetrię, może interesującą z kognitywnego punktu widzenia. Otóż odrzucamy nieskończony *regres* w uzasadnianiu, a np. w teorii mnogości dowodzimy twierdzenia o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru (przypomnijmy: struktura liniowo uporządkowana $(X, \leqslant)$ jest *dobrze uporządkowana*, gdy każdy niepusty podzbiór $A \subseteq X$ zawiera element $\leqslant$-najmniejszy). *Ufun-*

dowanie zdaje się zatem być jakąś naturalną naszą predyspozycją. Z drugiej strony, dopuszczamy swobodnie nieskończony *progres*: czy to w znajdowaniu coraz to nowych konsekwencji uznanych zdań, czy też w konstruowaniu coraz bardziej złożonych zbiorów.

Nerwowe pytanie: *A jak jest naprawdę? Czy PA jest niesprzeczna?* zasługuje na spokojną odpowiedź. *My* mamy dowody niesprzeczności arytmetyki (np. dowód Gentzena). To tylko PA, *sama o sobie*, nie potrafi dowieść niesprzeczności PA. Kognitywista potrafi.

2. Liczby rzeczywiste i ciągłość

Przeciętnie wykształcony obywatel pytany o *liczby* rzeczywiste najprawdopodobniej powiąże je z kontinuum *geometrycznym*. W tradycji filozoficznej Zachodu znajdujemy wiele *aporii* związanych z kontinuum geometrycznym. Dotyczą one m.in.: nieskończonej podzielności, niemożności otrzymania całości o wielkości niezerowej z elementów o zerowej właśnie wielkości, a także zjawisk związanych z *ruchem* oraz *prędkością*. Istotę tych trudności widzimy dzisiaj w samej naturze *ciągłości*, cesze, którą przypisujemy zarówno kontinuum geometrycznemu, jak też niektórym systemom liczbowym, w tym przede wszystkim liczbom rzeczywistym.

W historii refleksji nad ciągłością oraz kontinuum (geometrycznym) reprezentowano różne stanowiska, dotyczące problemu z jakich części składa się to kontinuum, czy w ogóle składa się z jakichkolwiek części, jak miałyby one być ze sobą połączone, itp. Oto, dla przykładu, niektóre z wczesnych stanowisk:

- kontinuum nie składa się z atomów, lecz z części podzielnych bez końca (Arystoteles, Awerroes, Bradwardine, Kepler, Cavaglieri);
- kontinuum składa się z niepodzielnych części: niepodzielnych brył (Demokryt), niepodzielnych punktów (Pitagoras, Platon); przy tym niektórzy sądzą, iż tych niepodzielnych części jest skończenie wiele, inni, że jest ich nieskończenie wiele.

Podkreślmy, że owo *składanie się* (np. u Bradwardine'a) rozumieć należy jako *scalanie*: *Nullum continuum ex athomis integrari.* Nadto, kontinuum składać miałoby się z nieskończonych kontinuów (tego samego rodzaju).

Ciągłość wiązano nie tylko z ruchem, ale ze *zmiennością* w ogóle: np. z rozmaitą *intensywnością* cechy (w różnych miejscach lub momentach). Jedną z takich intensywności jest np. *prędkość*: rejestrujemy ją względem *czasu*, a wielkością zmienną jest przebyta *droga*. Do wielu poglądów fizyki Arystotelesa, które odrzucone zostały już w Średniowieczu należał i ten, iżby prędkości nie można było wiązać z *chwilą, momentem* czasu. Kulminację tego odrzucenia znajdujemy u Galileusza.

Dopiero po okresie rozwoju analizy matematycznej w pracach Newtona, Leibniza, Eulera (oraz oczywiście wielu innych) zaczęto dostrzegać coraz wyraźniej konieczność nadania jej solidnych podstaw logicznych, bodajże od sformułowania pewnych *ograniczeń* w pracach Lagrange'a. Nadchodzi czas myślenia o *całkiem dowolnych* funkcjach, odstąpienie od myślenia o funkcjach jako pewnych *przepisach, zasadach* (co związane było z ilościowymi opisami w naukach ścisłych). Wiek XIX to czas *arytmetyzacji* analizy matematycznej. Oznacza to między innymi, że kontinuum, które przebiega zmienna niezależna jest reprezentowane przez strukturę liczbową, podobnie dla zbiorów wartości rozważanych funkcji. Arytmetyczną reprezentację uzyskują także najważniejsze pojęcia analizy, a mianowicie pojęcia *granicy* (funkcji, ciągu) oraz *ciągłości* (funkcji). To znajdujemy już w pracach Gaussa oraz Cauchy'ego. Bolzano podaje dowód twierdzenia, iż funkcja ciągła przyjmuje *wszystkie* wartości między każdymi z dwóch przez nią przyjmowanych. Wyraźnie wypowiada pogląd, że kontinuum składa się z punktów. Szczyty precyzji osiąga analiza matematyczna w wykładach Weierstrassa, wraz z wyraźnym posługiwaniem się używaną do dziś konwencją $\varepsilon - \delta$ oraz stosowaniem kwantyfikacji. W drugiej połowie wieku XIX powstają *teorie* liczb rzeczywistych (Méray (1869), Cantor (1872), Heine (1872), Dedekind (1858, opublikowana w 1872)). Dopiero w 1870 roku Schwartz przedstawia ścisły dowód twierdzenia, które u Newtona było jedynie postulatem: *jeśli pochodna funkcji f wszędzie równa jest zeru, to f jest funkcją stałą.*

Bardzo wpływowa koncepcja Dedekinda liczb rzeczywistych formułowana jest już z pełną świadomością programu arytmetycznego ujęcia analizy. Gęsto uporządkowany zbiór liczb wymiernych zawiera *luki*: istnieją przekroje tego zbioru, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej. Tym właśnie przekrojom mają *odpowiadać*, wedle Dedekinda, *liczby niewymierne*. Można zatem *definiować* liczby niewymierne poprzez owe przekroje, o ile dysponuje się dobrze ugruntowanymi teoriami: liczb *wymiernych* oraz *zbiorów*. Pierwszej z nich dostarcza w 1898 roku Weber, sprowadzając arytmetykę liczb wymiernych do arytmetyki liczb naturalnych. Podstawy aksjomatyczne dla arytmetyki liczb naturalnych podaje zaś Peano w 1889 roku. Matematyczną teorię zbiorów proponuje Cantor (1972, 1983), pierwszej dla niej aksjomatyki dostarcza Zermelo (1908).

Czy można uznać, że odtąd istota *ciągłości* jest już w pełni, wyczerpująco dobrze określona? Nie wszyscy matematycy zgodzą się z takim stwierdzeniem (por. np. uwagi kończące książkę Mioduszewski (1996)). Zacytujmy też zdanie kończące książkę Bukovský'ego (1979):

> Z toho, čo sme uviedli, môžeme však dôjsť' k rovnakému poučeniu, aké predpovedal N. Luzin v [59], str. 322: že prišiel čas, ked' *je potrebné vykonat' reformu našich predstaŕ o kontinuu.* [Tutaj [59] odnosi się do pracy: Luzin (1930)]

Dychotomia *dyskretne – ciągłe* stanowi też chyba wyzwanie dla badań kognitywnych. Jeśli uważać umysł za dyskretny system o skończonej liczbie stanów, to w jaki sposób wyjaśnić fakt, iż umysł ten operuje całościami ciągłymi (np. rozpoznaje twarze)? Może *naprawdę* operujemy tylko wielkościami dyskretnymi?

O ile wiadomo, nie mamy żadnych bezpośrednich *dowodów* na to, że rzeczywistość ma strukturę ciągłą. Czy zatem ciągłość mogłaby być tylko kategorią *subiektywną*, projekcją umysłu, jego swobodnym wytworem (reprezentowanym przez ciągłe struktury matematyczne)?

2.1. Algebra

Wskazuje się na dwie metody konstrukcji systemów liczbowych: *genetyczną* oraz *aksjomatyczną*. W pierwszej wychodzi się od liczb naturalnych (wraz z operacjami dodawania i mnożenia) i kolejno *konstruuje się*: liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste oraz zespolone, za każdym razem z odpowiednimi na nich działaniami. To właśnie między innymi *niewykonalność* pewnych działań na liczbach określonego już rodzaju (np. niewykonalność odejmowania liczb naturalnych lub niewykonalność dzielenia liczb całkowitych) prowadzi do stosownego rozszerzenia rozumienia pojęcia liczby tak, aby wymagane operacje były wykonalne. Druga metoda polega na określeniu dla każdego rodzaju liczb, wraz z towarzyszącymi im operacjami, zestawu warunków (aksjomatów), które mają być przez owe liczby oraz operacje spełnione.

Przypomnijmy, że *przekrojem* zbioru (ostro) liniowo uporządkowanego $(X, <)$ nazywamy każdą parę zbiorów (A, B) zawartych w X takich, że $A \cup B = X$ oraz $a < b$ dla dowolnych $a \in A$ oraz $b \in B$. Jeśli (A, B) jest przekrojem $(X, <)$, to dla dowolnych $a \in A$ oraz $b \in B$:

1. Dla wszystkich $x \in X$: jeśli $x < a$, to $x \in A$.
2. Dla wszystkich $x \in X$: jeśli $b < x$, to $x \in B$.

Aksjomat ciągłości, tak, jak bywa on formułowany w teorii liczb rzeczywistych, czyli dołączany do aksjomatów ciała uporządkowanego $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ może przyjmować którąś z następujących postaci (por. Błaszczyk (2007), s. 306):

1. Dla każdego przekroju (A, B) w $(R, <)$ albo w A istnieje element największy, albo w B istnieje element najmniejszy.

2. Dla każdego niepustego, ograniczonego z góry zbioru $A \subseteq R$ istnieje w R jego kres górny.
3. Dla każdego nieskończonego i ograniczonego zbioru $A \subseteq R$ istnieje w R punkt skupienia (w topologii porządkowej).
4. $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym i dla każdego ciągu $(a_n) \subseteq R$ istnieje $a \in R$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
5. $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym i dla każdego ciągu zstępujących przedziałów domkniętych (A_n) zachodzi $\bigcap\limits_n A_n \neq \emptyset$.

To właśnie aksjomat ciągłości jest owym aksjomatem ekstremalnym, przy tym aksjomatem maksymalności, który miałby charakteryzować *ciągłe* uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych. Formułowany był on początkowo na różne sposoby; przypomnijmy niektóre źródła. We wszystkich zakłada się, że liczby wymierne są dane, dostępne, zostały już skonstruowane.

- David Hilbert. *Über den Zahlbegriff* (1900). Aksjomat ciągłości formułowany jest dokładnie w postaci aksjomatu ekstremalnego: do aksjomatyki ciała uporządkowanego dołączony zostaje postulat głoszący, iż nie może ono zostać rozszerzone, z zachowaniem zachodzenia pozostałych aksjomatów.
- Georg Cantor. *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (1872). Określa się *liczby uogólnione* jako związane z ciągami liczb wymiernych, spełniającymi (w dzisiejszej terminologii) warunek Cauchy'ego. Dla tak rozumianych liczb określa się działania arytmetyczne. Koncepcję tę rozwija Cantor w § 9 rozprawy *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (1883).
- Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). Podstawowe pojęcie to pojęcie *przekroju* (zbioru wszystkich liczb wymiernych). Liczby rzeczywiste utożsamiane są z takimi przekrojami. Działania na przekrojach przekładają się na znane działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych.
- Eduard Heine. *Die Elemente der Functionenlehre* (1872). Autor deklaruje, że przedstawia właściwie poglądy Karla Weierstrassa, wyrażane w jego wykładach i przedtem w druku niedostępne. Liczby traktowane są jako *znaki*: liczby rzeczywiste tworzymy, przyporządkowując znak ciągowi liczb wymiernych, spełniającemu warunek Cauchy'ego.

We wszystkich wymienionych propozycjach odróżnia się już liczby rzeczywiste od kontinuum geometrycznego (linii prostej), wskazując jednak oczywiście na związki pomiędzy obiema dziedzinami. Warte podkreślenia są przy tym dwie sprawy:

- Każdy z powyższych autorów wskazuje na *twórczy* moment w definicji liczb rzeczywistych. Liczby te powstają w wyniku *aktu kreacji*, odwołującego się do określonych ciągów liczb wymiernych.
- Wyraźnie stwierdza się, że nie ma żadnych podstaw do rozstrzygnięcia, czy rzeczywistość pozajęzykowa ma charakter dyskretny czy też ciągły. Porządki ciągłe są konstruktem matematycznym, nie przesądzamy czy odpowiada mu coś realnego (w przestrzeni lub czasie).

Współcześnie najbardziej popularne są bodaj dwa podejścia do definicji liczb rzeczywistych: poprzez klasy równoważności ciągów liczb wymiernych spełniających warunek Cauchy'ego (tradycja Cantora) lub poprzez przekroje liniowo gęsto uporządkowanego zbioru liczb wymiernych (tradycja Dedekinda).

W algebrze i topologii dowodzi się twierdzeń wskazujących na wyjątkowość liczb rzeczywistych ze względu na połączenie ich własności: algebraicznych, porządkowych oraz topologicznych. W tym zatem sensie, liczby rzeczywiste tworzą *model zamierzony* stosownych teorii, mówiących o tych własnościach. Dla przykładu:

- *Twierdzenie Frobeniusa. Każda łączna algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych jest izomorficzna albo z ciałem liczb rzeczywistych, albo z ciałem liczb zespolonych, albo z algebrą kwaternionów.* (Istnieje też uogólnienie tego twierdzenia, dodające w tezie *oktawy Cayleya.*)
- *Twierdzenie Ostrowskiego. Każde ciało zupełne w metryce odpowiadającej normie archimedesowej jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub ciałem liczb zespolonych, a norma jest równoważna ze zwykłą wartością bezwzględną.*
- *Twierdzenie Pontriagina. Każde spójne lokalnie zwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z ciałem topologicznym liczb rzeczywistych, lub ciałem topologicznym liczb zespolonych, lub ciałem topologicznym kwaternionów.*

Wzięcie pod uwagę dalszych własności (uporządkowania, przemienności mnożenia) pozwala odróżnić między sobą wymienione wyżej ciała:

- ciało liczb rzeczywistych jest liniowo uporządkowane (w sposób gęsty, przy tym liczby wymierne tworzą w nim *ośrodek*), na mocy aksjomatu ciągłości porządek ten jest też ciągły; ciało liczb zespolonych nie jest uporządkowane (przez relację porządku zgodną z działaniami arytmetycznymi);
- ciało liczb rzeczywistych jest przemienne, ciało kwaternionów jest nieprzemienne (względem mnożenia).

Tak więc, *arytmetyczne* kontinuum, gdy określane jest wraz z dodatkowymi strukturami (porządkowymi oraz topologicznymi), zgodnymi z operacjami arytmetycznymi, może zostać scharakteryzowane w sposób jednoznaczny. Wśród wielu ciał, które mogłyby służyć za podstawę systemów liczbowych, pewne są istotnie wyróżnione, nie tylko *pragmatycznie*, ale właśnie przez wyraźnie podane warunki *matematyczne*.

Ograniczone ramy czasowe tego odczytu nie pozwalają na dalsze uwagi na ten temat. Interesujące są inne jeszcze rozumienia kontinuum geometrycznego: np. liczby *hiperrzeczywiste*, otrzymywane przy użyciu konstrukcji *ultraproduktu* i mające olbrzymie znaczenie w rozwoju *analizy niestandardowej*, w której można precyzyjnie określić pojęcie wielkości *nieskończenie małej*, tak istotne dla podstaw analizy matematycznej, a używane przez twórców rachunku różniczkowego i całkowego w sposób sprzeczny.

Z drugiej strony, liczby rzeczywiste w dalszym ciągu pozostają jednak wielce tajemnicze. Wiąże się to chociażby z sytuacją we współczesnej teorii mnogości, na gruncie której liczby rzeczywiste są definiowane. Niezależnych od teorii mnogości ZF jest bardzo wiele zdań, które w ten czy inny sposób dotyczą liczb rzeczywistych. Słuchacze słyszeli zapewne o słynnej *hipotezie kontinuum*, głoszącej, iż moc kontinuum jest bezpośrednio następną po mocy przeliczalnej. Zdania tego nie można ani udowodnić, ani obalić na gruncie ZF. Co więcej, kontinuum może przybierać prawie całkiem dowolną wartość na skali *alefów*, czyli kolejnych mocy zbiorów nieskończonych (wykluczone są tylko niektóre wartości dla kontinuum, np. $\aleph_\omega$, i w ogólności wszyskie moce o tzw. *przeliczalnej współkońcowości*).

Wreszcie, od aksjomatów teorii mnogości niezależne są też liczne zdania, mówiące coś o własnościach zbiorów liczb rzeczywistych, wyrażanych w terminach komplikacji definicyjnej oraz np. własności topologicznych. Dla przykładu, takie jest zdanie: *wszystkie zbiory rzutowe są mierzalne w sensie Lebesgue'a*. Podobnie rzecz się ma np. z *hipotezą Suslina*. *Drzewo Suslina* to drzewo o wysokości $\aleph_1$, w którym zarówno wszystkie łańcuchy, jak i antyłańcuchy są przeliczalne. *Hipoteza Suslina* SH głosi, że *nie istnieje drzewo Suslina*. Aksjomat konstruowalności (o którym za chwilę) implikuje zaprzeczenie SH. Hipotezę SH można też sformułować tak: każdy porządek liniowy bez elementu pierwszego i ostatniego, w którym topologia porządkowa jest spójna i spełnia warunek ccc (przeliczalnych antyłańcuchów) jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych wraz z ich naturalnym porządkiem.

2.2. Geometria

W pierwszych wydaniach *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta aksjomat zupełności formułowany był następująco:

> Elementy (punkty, proste, płaszczyzny) systemu geometrii tworzą system, który nie może zostać rozszerzony bez jednoczesnego naruszenia pozostałych aksjomatów, tj. nie można dodać do tego systemu punktów, prostych i płaszczyzn innego systemu przedmiotów tak, aby powstały system spełniał wszystkie pozostałe aksjomaty.

Widać, że aksjomat ten ma inny status niż pozostałe. „Mówi" mianowicie coś o pozostałych aksjomatach systemu oraz o jego modelach. Nie należy zatem do języka przedmiotowego, lecz do metajęzyka. Stwierdza *maksymalność* modelu *zamierzonego* geometrii: uniwersum tego modelu jest „maksymalnie bogate", jeśli chodzi o zasób elementów, powiązanych własnościami wyrażanymi w aksjomatach.

Aksjomat zupełności formułował Hilbert także w odniesieniu do liczb rzeczywistych (*Über den Zahlbegriff*, 1900):

> IV.2. (*Aksjomat zupełności*) Nie jest możliwe uzupełnienie systemu liczb poprzez dodanie innego systemu rzeczy tak, aby w powstałym przez połączenie systemie spełnione były wszystkie aksjomaty I, II, III, IV.1.; lub krótko: liczby tworzą system rzeczy, który przy zachowaniu wszystkich aksjomatów nie jest zdolny do żadnego dalszego rozszerzenia.

W późniejszych wydaniach *Grundlagen der Geometrie* aksjomat zupełności w powyższym sformułowaniu zostaje zastąpiony *aksjomatem ciągłości*, tak, jak bywa on formułowany w teorii liczb rzeczywistych, czyli dołączany do aksjomatów ciała uporządkowanego $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$.

Aksjomat ciągłości w *geometrii absolutnej* jest niezależny od pozostałych: pokazuje się, że modelem pozostałych aksjomatów oraz zaprzeczenia aksjomatu ciągłości jest zbiór wszystkich liczb algebraicznych (jako punktów przestrzeni), wraz ze stosownymi arytmetycznymi interpretacjami pojęć geometrycznych.

O systemie geometrii Hilberta (wraz z aksjomatem ciągłości) udowodnić można, że jest on kategoryczny. Podobnie, dowodzi się kategoryczności systemu geometrii euklidesowej (wraz z aksjomatem o równoległych) przedstawionego w monografii (Borsuk, Szmielew 1975), gdzie pojęciami pierwotnymi są: przestrzeń (zbiór wszystkich punktów), rodziny prostych i płaszczyzn, trójargumentowa relacja $\mathbf{B}xyz$ leżenia między (punkt y leży między punktami x oraz z) oraz czteroargumentowa relacja $\mathbf{D}xyuv$ równoodległości punktów (punkt x jest tak samo odległy od y, jak u od v). W systemie tym aksjomat ciągłości przyjmuje postać następującą (Borsuk, Szmielew 1975, s. 140):

> Jeśli X, Y są niepustymi zbiorami punktów oraz istnieje punkt a taki, że jeżeli $p \in X$ oraz $q \in Y$, to $\mathbf{B}apq$, to istnieje punkt b taki, że jeśli $p \in X - \{b\}$ oraz $q \in Y - \{b\}$, to $\mathbf{B}pbq$.

Ten aksjomat ciągłości jest jedynym aksjomatem rozważanego systemu geometrii, w którym mowa o *zbiorach* punktów; sam system nie jest zatem *elementarny*. Niesprzeczności systemu dowodzi się budując dlań model kartezjański. Dla systemu *geometrii absolutnej*, który powstaje z powyższego przez pominięcie aksjomatu o równoległych buduje się, obok kartezjańskiego, także *model Kleina*. Modele te nie są izomorficzne, a więc geometria absolutna nie jest teorią kategoryczną. Dodanie do geometrii absolutnej zaprzeczenia aksjomatu o równoległych (w wersji Bolyai-Łobaczewskiego, czyli stwierdzającej, że dla pewnej prostej oraz punktu do niej nie należącego istnieją co najmniej dwie różne proste przechodzące przez ten punkt i rozłączne z ową pierwszą prostą) również pozwala uzyskać system kategoryczny.

Należy jednak wystrzegać się nazywania modeli geometrii nieeuklidesowych modelami *niezamierzonymi*. Wyróżnione miejsce wśród systemów geometrii zajmuje geometria euklidesowa tylko ze względów natury historycznej i filozoficznej. Podobnie rzecz się ma np. z *geometrią rzutową*: pamiętamy, jakie są jej związki ze sztukami wizualnymi. Zarówno dla historyka nauki, jak i dla kognitywisty ciekawe jest chyba to, że geometria rzutowa opracowana została o wiele później od geometrii euklidesowej.

Modelem dla *geometrii hiperbolicznej* (Łobaczewskiego) jest np. *dysk Poincaré'go*. Punktami są tu punkty wnętrza koła, a prostymi są łuki okręgów prostopadłych do okręgu ograniczającego rozważane koło oraz cięciwy tego ostatniego okręgu. W tym modelu przez punkt nie leżący na danej prostej można zatem poprowadzić więcej niż jedną prostą „równoległą" do danej. Już Poincaré podał możliwą interpretację fizyczną takiego modelu: taki Wszechświat byłby płaskim dyskiem bez brzegu, rozmiary obiektów fizycznych zmieniałyby się w zależności od ich odległości od środka dysku. Tak więc, krocząc ku krawędzi Wszechświata nigdy nie zdołałbyś jej osiągnąć: twoje kroki byłyby coraz mniejsze (ty sam zresztą również). Artystyczna wizja takiego Wszechświata znana jest z grafik Eschera.

Modelem dla *geometrii eliptycznej* (gdzie zaprzeczenie aksjomatu Euklidesa sprowadza się do tego, iż nie istnieje żadna prosta równoległa do danej i przechodząca przez punkt poza ową daną prostą) jest np. układ, w którym punktami są pary punktów antypodycznych na sferze (dwuwymiarowej), prostymi okręgi kół wielkich tej sfery, a płaszczyzną zbiór wszystkich tak rozumianych punktów. W tym modelu nie istnieją proste „równoległe" (proste rozłączne). Łatwo sobie wyobrazić, że np. komunikacja lotnicza bierze pod uwagę własności tego modelu (oraz nieregularności spowodowane warunkami natury politycznej).

Aksjomatyczny system geometrii Tarskiego jest teorią elementarną, której pojęciami pierwotnymi są predykaty $\mathbf{B}xyz$ oraz $\mathbf{D}xyuv$, które czytamy tak samo, jak powyżej. Tutaj aksjomat ciągłości nie jest pojedynczą formułą, ale *schematem aksjomatów* o następującej postaci:

$$\exists z \forall x \forall y\ ((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \rightarrow \mathbf{B}xyz) \rightarrow \exists u \forall x \forall y\ ((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \rightarrow \mathbf{B}xuz),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest formułą, w której y, z, u nie są zmiennymi wolnymi, a $\psi(y)$ jest formułą, w której x, z, u nie są zmiennymi wolnymi.

System geometrii Tarskiego jest *zupełny* oraz *rozstrzygalny*. W aksjomatach występują jedynie pojęcia pierwotne. System ma szereg dalszych „miłych" własności metamatematycznych. Mniejsze natomiast są jego walory jako podstawy do *praktycznego* uprawiania geometrii euklidesowej.

Całkiem marginalnie wspomnijmy w tym miejscu, że także w topologii ogólnej rozważa się przestrzenie, które mają własność *zupełności*. Mianowicie przez przestrzeń *zupełną* rozumie się przestrzeń metryczną, w której każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do tej przestrzeni. Nie mówimy przy tym oczywiście o żadnych aksjomatach ekstremalnych, gdyż w przypadku ogólnych przestrzeni topologicznych pojęcie modelu zamierzonego teorii nie ma zastosowania.

3. Aksjomaty ekstremalne w teorii mnogości

W poprzednich dwóch punktach rozważaliśmy, odpowiednio, aksjomat *minimalności* (schemat indukcji) oraz aksjomat *maksymalności* (aksjomat ciągłości). Miały one bądź (w pierwszym przypadku) ograniczać do niezbędnego minimum liczbę elementów modelu zamierzonego, bądź ustalać, iż takich elementów jest maksymalnie dużo (w przypadku drugim). A jak postępujemy w przypadku teorii mnogości? Czy termin *zbiór* miałby być rozumiany najbardziej *wąsko*, jak to możliwe, czy też raczej najbardziej *szeroko*? Rozważano obie te możliwości. Pierwsza została odrzucona, obecne badania w teorii mnogości skupione są na tej drugiej. Dodajmy od razu, iż to drugie rozwiązanie nie jest jedynym możliwym. Nie sposób przecież wykluczyć, iż teoria mnogości utraci swój status teorii, na której bazujemy całość matematyki, stając się teorią podobna np. do teorii grup czy ogólnych przestrzeni topologicznych. W istocie, już niektórzy ze współtwórców tej teorii (Thoralf Skolem, John von Neumann) bardzo sceptycznie wypowiadali się o teorii mnogości jako o podstawie dla całej matematyki.

Zakładam, że czytelnikom znana jest teoria mnogości ZF Zermelo-Fraenkla, najbardziej obecnie popularne przedstawienie naszych poglądów na temat zbiorów. Czy możemy mówić o modelu *zamierzonym* tej teorii? Czy może on zostać jednoznacznie określony? Czy istnieje uniwersum wszystkich *prawdziwych* zbiorów? A jeśli byłoby więcej niż jedno uniwersum wszystkich zbiorów, to co mogłoby to oznaczać dla reszty matematyki?

Już choćby ze względu na to, że arytmetykę PA możemy interpretować w teorii mnogości ZF, ta ostatnia dziedziczy niejako wyniki dotyczące niezupełności, nierozstrzygalności, itd. tej pierwszej. Czasem mawia się, że „instancją odwoławczą" dla arytmetyki jest teoria mnogości; ta ostatnia jednak już takiej „instancji odwoławczej" nie posiada. Wiemy zatem, że ZF (o ile jest niesprzeczna), to jest niezupełna, nierozstrzygalna, nie może dowieść własnej niesprzeczności, itd.

Dalej, wiemy z twierdzenia Löwenheima-Skolema, że jeśli teoria mnogości posiada jakikolwiek model, to ma też model przeliczalny: uniwersum równoliczne ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, w którym mieszczą się *wszystkie* zbiory, także te, o których dowodzimy w ZF, iż są one nieprzeliczalne. Nie ma tu sprzeczności, ani nawet paradoksu, o ile pamiętamy definicje równoliczności oraz przeliczalności i nieprzeliczalności. Przeliczalny model dla ZF nie zawiera po prostu wystarczającej liczby odwzorowań, które przeliczalność bądź nieprzeliczalność występujących w nim zbiorów miałyby poświadczać.

W każdym razie, przeliczalnych modeli dla ZF nie nazwiemy chyba jej modelami *zamierzonymi.* A jakie w ogóle ZF może mieć modele? To właśnie zależy od tego, jak wąsko lub szeroko będziemy rozumieli termin *zbiór*, a w szczególności, co będziemy rozumieli przez *rodzinę* $\wp(X)$ *wszystkich podzbiorów* dowolnego zbioru X.

Jedna z możliwości, maksymalistyczna, to ta znana czytelnikom ze szkoły: $\wp(X) = \{A : A \subseteq X\}$, gdzie $A \subseteq X \equiv \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in X)$. Zauważmy, że gdy X jest zbiorem nieskończonym przeliczalnym, to moc $\wp(X)$ jest równa kontinuum, a ponieważ jest jedynie przeliczalnie wiele formuł z jedną zmienną wolną języka ZF, czyli formuł *definiujących* zbiory, więc *nieprzeliczalnie wiele* podzbiorów zbioru X jest wtedy niedefiniowalnych: nie można ich w żaden sposób „nazwać" w rozważanej teorii, są one językowo niedostępne.

Przypominamy *hierarchię kumulatywną zbiorów*, definiowaną (przez tzw. *indukcję pozaskończoną*) w sposób następujący:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup\{V_\beta : \beta < \lambda\}$ dla λ granicznych
- $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha$ jest liczbą porządkową$\}$.

Nazwiemy liczbę kardynalną κ liczbą *(mocno) nieosiągalną*, jeżeli spełnia ona następujące dwa warunki:

- Dla każdej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$ również liczba kardynalna 2^κ jest mniejsza od κ.
- κ nie jest sumą mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ.

Liczby nieosiągalne nie mogą zatem zostać „osiągnięte" przez operacje tworzenia zbioru potęgowego i sumowania. Ich istnienia nie można udowodnić w teorii mnogości ZF. Przy założeniu ich istnienia można natomiast udowodnić, że każde piętro V_κ hierarchii kumulatywnej, gdzie κ jest liczbą nieosiągalną, jest modelem dla teorii ZF. Ponieważ każda moc zbioru jest alefem, to jeśli istnieją liczby nieosiągalne κ, to (jak się dowodzi) spełniają one warunek: $\kappa = \aleph_\kappa$.

Otrzymujemy więc pewne modele dla teorii mnogości ZF, kosztem dołączenia do niej *nowego aksjomatu nieskończoności*: aksjomatu istnienia liczb nieosiągalnych.

Istnieje też inna, minimalistyczna możliwość rozumienia operacji tworzenia zbioru potęgowego. Przez zbiór potęgowy zbioru X rozumiemy mianowicie rodzinę wszystkich jego podzbiorów, *definiowalnych* formułami języka ZF. Hierarchię *zbiorów konstruowalnych* budujemy teraz tak, jak hierarchię kumulatywną, zastępując jedynie w krokach następnikowych operację tworzenia pełnego zbioru potęgowego przez operację tworzenia rodziny wszystkich podzbiorów definiowalnych. Pokazuje się, że suma (po wszystkich liczbach porządkowych) tej hierarchii również jest modelem dla teorii ZF. Jak wiadomo, hierarchia ta posłużyła Gödlowi do wykazania (metodą *modeli wewnętrznych*), że jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest również ZF wraz z uogólnioną hipotezą kontinuum.

Zdanie głoszące, iż *wszystkie zbiory są konstruowalne*, nazywane *aksjomatem konstruowalności* jest przykładem aksjomatu ekstremalnego (minimalności) w teorii mnogości. Bardzo istotnie ogranicza ono uniwersum istniejących zbiorów: istnieją w nim jedynie te zbiory, które są definiowalne formułami języka teorii ZF. Ten świat zbiorów jest zatem, mówiąc metaforycznie, jedynie cieniem języka teorii.

Inny przykład minimalistycznego aksjomatu ekstremalnego w teorii mnogości to *aksjomat ograniczenia*, sformułowany przez Fraenkla. Głosi on, w uproszczeniu: nie istnieją żadne inne zbiory, oprócz tych, których istnienia można dowieść w teorii mnogości. W takim sformułowaniu nie jest to oczywiście aksjomat języka przedmiotowego teorii, lecz dość niejasno sformułowany w metajęzyku warunek. Trzeba dodać w tym miejscu, że Fraenkel proponował ten aksjomat dla teorii mnogości jeszcze *bez aksjomatu regularności* i to właśnie aksjomat ograniczenia miał wykluczać istnienie zbiorów *nieufundowanych*. Ponadto, Fraenkel rozważał możliwość uzyskania warunków przesądzających kategoryczność lub zupełność teorii mnogości (należy pamiętać, iż rozważania te prowadził *przed* wynikami Gödla dotyczącymi niezupełności odpowiednio bogatych teorii matematycznych).

Aksjomaty ograniczenia, w wersji *„każdy zbiór ma nazwę”* (w języku teorii) były proponowane również przez Romana Suszkę oraz Johna Myhilla. Bardzo wnikliwą krytykę aksjomatów ograniczenia podano w monografii Fraenkel, A., Bar Hillel, Y., Levy, A. (1973). Pomysł, aby rozumieć pojęcie zbioru tak wąsko, jak to możliwe został porzucony. Należy jednak zaznaczyć, że bada się w dalszym ciągu konsekwencje różnych wersji aksjomatu konstruowalności oraz zdania mocniejsze, implikujące ten aksjomat.

Do poszukiwania innych, maksymalistycznych, aksjomatów dla teorii mnogości zachęcał Gödel już w latach czterdziestych XX wieku. Miałyby to być aksjomaty stwierdzające, że zbiorów istnieje tak wiele, jak tylko to możliwe, a więc pewne *silne aksjomaty nieskończoności.* Skromnym tego typu aksjomatem jest aksjomat istnienia liczb nieosiągalnych. Innym, również jeszcze skromnym, jest aksjomat istnienia liczb *mierzalnych.* Bez straszenia formalną definicją powiedzmy jedynie, że liczby mierzalne (jeżeli istnieją) są o wiele większe od liczb nieosiągalnych: jeśli κ jest liczbą mierzalną, to poprzedza ją κ liczb nieosiągalnych. Istnienie liczb mierzalnych wiąże się z istnieniem *miary* na pewnych zbiorach. Aksjomat istnienia liczb mierzalnych implikuje zaprzeczenie aksjomatu konstruowalności.

Rozważa się wielką różnorodność coraz to mocniejszych aksjomatów nieskończoności. Nie chodzi przy tym jedynie o ezoteryczne igraszki matematyków z nieskończonością, próby zbliżania się do jakiejś Nieskończoności Absolutnej, lecz również o konsekwencje takich aksjomatów, dotyczące *dowodliwości.* Mówiąc w sposób bardzo popularny, bez ambicji do ścisłego wyrażania się: im silniejsze przyjmiemy aksjomaty nieskończoności, tym większe mamy możliwości dowodowe, w szczególności w odniesieniu do zdań, które w słabszych systemach są zdaniami niezależnymi od aksjomatów. A ponieważ zbudowano olbrzymią obfitość zdań niezależnych od teorii mnogości ZF (wskazując tym samym, jak w istocie niezwykle słabo teoria ta charakteryzuje jej podstawowe pojęcie *zbioru*), więc postępując w ten sposób mamy nadzieję na bardziej adekwatne opisanie pojęcia zbioru.

Zdanie stwierdzające niesprzeczność arytmetyki n-tego rzędu PA_n nie może zostać rozstrzygnięte w samej PA_n, ale może być rozstrzygnięte w arytmetyce $n+1$-ego rzędu PA_{n+1}. Owe coraz mocniejsze systemy arytmetyki wiążą się z poziomami kumulatywnej hierarchii zbiorów. Pewne zdania mogą zostać rozstrzygnięte dopiero na nieskończonych piętrach hierarchii kumulatywnej (np. hipoteza kontinuum CH lub zdanie PM, stwierdzające, iż *wszystkie zbiory rzutowe są mierzalne w sensie Lebesgue'a*).

Niech Z_0 będzie teorią ZFC bez aksjomatów: nieskończoności oraz zastępowania. Standardowym modelem dla Z_0 jest V_ω. Istnienie tego zbioru wynika z aksjomatu nieskończoności. Niech Z_1 oznacza Z_0 wraz z aksjomatem nieskończoności. Wtedy w Z_1 możemy udowodnić, że:

- Z_0 jest niesprzeczna.
- Istnieje model standardowy dla Z_0.

Modelem standardowym dla Z_1 jest z kolei $V_{\omega+\omega}$. Istnienie tego zbioru gwarantowane jest przez aksjomat zastępowania. Niech Z_2 oznacza Z_1 wraz z aksjomatem zastępowania. Wtedy w Z_2 możemy udowodnić, że:

- Z_1 jest niesprzeczna.
- Istnieje model standardowy dla Z_1.

Standardowym modelem dla Z_2 jest V_κ, gdzie κ jest liczbą (mocno) nieosiągalną. Następnym w hierarchii będzie zatem aksjomat stwierdzający istnienie liczby nieosiągalnej. Następna teoria, czyli ZFC wraz z tym aksjomatem dowodzi istnienia poziomu hierarchii kumulatywnej, który jest modelem dla ZFC. Domyślamy się, że postępując dalej w ten sposób otrzymujemy coraz mocniejsze aksjomaty nieskończoności, stwierdzające istnienie coraz wyższych poziomów (pięter) w uniwersum zbiorów.

Na mocy wyników Gödla i Cohena wiemy, że zarówno ZFC wraz z CH, jak i ZFC wraz z negacją CH są wzajemnie interpretowalne z ZFC. Z kolei, Gödel pokazał, że negacja zdania PM zachodzi w klasie wszystkich zbiorów konstruowalnych L (czyli w L prawdziwe jest zdanie orzekające, że istnieje zbiór rzutowy, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a). Tak więc, ZFC wraz z negacją PM jest wzajemnie interpretowalna z ZFC. Co możemy powiedzieć o samym zdaniu PM? Czy metodą wymuszania można zbudować model ZFC, w którym prawdziwe jest zdanie PM? Okazuje się, że ZFC wraz z PM implikuje niesprzeczność ZFC (Shelah), a więc na mocy twierdzenia o niedowodliwości niesprzeczności, ZFC wraz z PM nie jest interpretowalna w ZFC. Nawet jeśli zatem założymy niesprzeczność ZFC, to (inaczej niż w przypadku CH) nie możemy udowodnić, że PM jest zdaniem niezależnym od ZFC. Dla ustanowienia niezależności PM od ZFC potrzebujemy niesprzeczności teorii silniejszej, a mianowicie ZFC wraz ze zdaniem stwierdzającym istnienie liczby kardynalnej nieosiągalnej.

Może warto wspomnieć, że istnieje pewien wzorzec formułowania aksjomatów dla *naprawdę bardzo dużych* liczb kardynalnych. Aksjomaty takie stwierdzają mianowicie, że istnieje klasa przechodnia M oraz nietrywialne włożenie elementarne $j : V \to M$. Skoro j ma być nietrywialne (czyli różne od funkcji identycznościowej), to musi istnieć najmniejsza liczba kardynalna, której obraz względem j jest od niej różny (która zostaje „poruszona" przez j). Nazywamy ją *punktem krytycznym* odwzorowania j i oznaczamy przez $\mathrm{crit}(j)$. Dla przykładu, liczba kardynalna jest mierzalna dokładnie wtedy, gdy jest punktem krytycznym takiego włożenia elementarnego. O tego typu włożeniach zakładać możemy pewne dalsze warunki, uzyskując kolejne olbrzymie liczby kardynalne. Inne jeszcze tego rodzaju liczby uzyskujemy na mocy pewnych *warunków podziałowych*.

Czy może się zdarzyć, że nowe aksjomaty będą się nawzajem wykluczać? Albo, czy może być tak, że (atrakcyjny z pewnych względów matematycznych) nowy aksjomat może być w sprzeczności z którymś z aksjomatów ZFC? Ta druga sytuacja ma miejsce np. w przypadku *aksjomatu determinacji*: jest on mianowicie sprzeczny z aksjomatem wyboru. Aksjomat determinacji (stwierdzający, że w pewnego rodzaju grach dwuosobowych co najmniej jeden z graczy ma strategię wygrywającą) jest atrakcyjny np. z punktu widzenia teorii miary. Implikuje on, że każdy podzbiór odcinka jednostkowego $[0, 1]$ zbioru liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Słuchacze być może wiedzą, że (nieefektywny!) aksjomat wyboru ma pewne „paradoksalne" (dla intuicji potocznych, zdroworozsądkowych, związanych z percepcją obiektów spotykanych w doświadczeniu codziennym), konsekwencje np. twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli.

Uzus językowy, przyjęty w teorii mnogości nakazuje nazwać *standardowym* każdy model tej teorii, w którym interpretacja predykatu $\in$ jest relacją należenia (ograniczoną do uniwersum tego modelu). Dopuszcza się zatem *wielość* modeli standardowych. Tak więc w przypadku teorii mnogości chyba jednak porzucamy (odsuwamy w przyszłość?) mówienie o *modelu zamierzonym*. Szukamy nowych aksjomatów dla teorii mnogości, np. w postaci aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych. Nowe aksjomaty miałyby lepiej charakteryzować pojęcie zbioru (a więc w istocie podawać propozycję *nowego* rozumienia tego pojęcia), a ponadto rozstrzygać też zdania niezależne od systemu ZF. Oczywiście możliwa jest także inna strategia: pozostajemy przy dotychczasowej aksjomatyce i godzimy się na to, iż teoria mnogości ma podobny status, jak na przykład teorie algebraiczne lub topologiczne, dopuszczające mnogość interpretacji.

4. Moc wyrażania i moc dedukcyjna

Jak kognitywista może opisywać *podmiot poznający* używając środków logiki matematycznej? Jedna z możliwości jest chyba taka, że przekonania owego podmiotu reprezentowane są przez zdania ustalonego języka formalnego, a moce poznawcze wiązane jakoś z maszynerią dedukcyjną systemu logiki w owym języku. Tym, co jest poznawane są natomiast struktury, o których w rozważanym języku można mówić. Trzeba oczywiście precyzyjnie określić, jakiego typu inferencje może podmiot dokonywać. Wtedy można też charakteryzować całe zbiory przekonań podmiotów, ustalać, na jakie operacje są one domknięte. Przy takim ujęciu sprawy, rzecz sprowadza się do sytuacji znanej z teorii modeli: badania teorii dedukcyjnych oraz klas ich modeli.

Niezależnie od tego, że powyżej opisany stan rzeczy jest wielce wyidealizowany, a nawet ociera się o myślenie czysto życzeniowe, zauważyć warto dwie sprawy. Moce poznawcze podmiotu zależne byłyby zarówno od możliwości ekspresyjnych języka, jak i od własności pozostających w jego dyspozycji reguł inferencji, czyli jego systemu logiki.

Wspomniana idealizacja mogłaby być modyfikowana poprzez dalsze założenia o podmiocie poznającym; można np. zakładać, że:

- posiada on jakieś moce *obliczeniowe*;
- jest zdolny nie tylko do *reprezentowania* swojego otoczenia, ale również do jego *zmian*;
- jest wyposażony w system *preferencji*, pozwalający *wartościować* przekonania, a co za tym idzie, także *działania* (w tym np. naprawianie *błędów*);
- jest *samoświadomy*, posiada możliwość refleksji nad własnymi przekonaniami.

Moc obliczeniowa byłaby zapewne już zdeterminowana poprzez moc wyrażania oraz moc dedukcyjną. Uwzględnienie preferencji w modelowaniu podmiotu środkami logiki matematycznej nie wydaje się stwarzać trudności. Inaczej rzecz ma się chyba ze wspomnianą wyżej możliwością zmian otoczenia. Uznawanie globalnych przekonań podmiotu na temat całego jego systemu przekonań (np. mniemanie, iż jest on niesprzeczny i zupełny) podlega ograniczeniom, jak wiadomo ze stosownych metatwierdzeń logicznych.

Teraz zwrócić się możemy do metateorii z pytaniem, w jakich wzajemnych związkach mogą pozostawać owe dwie moce: ekspresyjna oraz dedukcyjna. Na *moc ekspresyjną* składałyby się m.in.: możliwość jednoznacznej (algebraicznie lub semantycznie) charakterystyki modeli oraz sama możliwość wyrażenia w rozważanym języku pewnych pojęć. Z kolei, *moc dedukcyjna* mierzona mogłaby być np. poprzez obecność lub nieobecność w rozważanej logice pewnych własności: pełności, zwartości, definiowalności, itd.

Wymowa niektórych wielkich metatwierdzeń logicznych jest taka, że owe dwie moce są w pewnym sensie wzajem niezgodne. Logika, która dysponuje dużą mocą wyrażania ma zwykle mniejszą moc dedukcyjną oraz na odwrót. Dla przykładu, klasyczna logika pierwszego rzędu ma wiele „porządnych" własności (pełność, zwartość, własność interpolacji, własność Löwenheima-Skolema, itd.), natomiast jej moc ekspresyjna jest bardzo mizerna. Wspomnieliśmy już o nieistnieniu teorii kategorycznych w jej języku. Dodajmy, że w języku pierwszego rzędu nie można wyrazić wielu podstawowych pojęć matematycznych (skończoności i nieskończoności, ciągłości, bycia zbiorem miary zero, itd.). Z drugiej strony, kategoryczne opisy modeli są możliwe w logice drugiego rzędu, w której można też wyrazić pojęcie nieskończoności, ale logika ta nie jest np. pełna, a więc do zbioru jej wszystkich praw nie można dotrzeć za pomocą jakichkolwiek efektywnych metod dedukcyjnych.

Można na różne sposoby *wzbogacać* system logiki pierwszego rzędu. Możemy rozszerzyć zestaw *stałych logicznych*, dodając np. *uogólnione kwantyfikatory*, dla których oczywiście podać należy odpowiednią semantykę. Możemy zmienić zasady *składni*, dopuszczając jako wyrażenia poprawne nieskończenie długie koniunkcje oraz alternatywy, a nawet nieskończenie długie prefiksy kwantyfikatorowe. Możemy wreszcie rozszerzyć zestaw standardowych reguł wnioskowania np. o *reguły infinitarne*, w rodzaju wspomnianej wyżej ω-reguły. W takich bogatszych językach uzyskujemy zwykle większą moc ekspresyjną, a czasem zdarza się też, że potrafimy znaleźć dla systemów owych bogatszych logik również odpowiedniki „porządnych" własności metalogicznych, a więc otrzymujemy, odpowiednio ogólniej rozumiane, własności składające się na moc dedukcyjną takich systemów. Spójrzmy na parę przykładów. Ograniczamy się przy tym do:

- języków L_{Q_α} z *kwantyfikatorami numerycznymi*; $Q_\alpha x\ \psi(x)$ ma znaczenie: istnieje co najmniej $\aleph_\alpha$ obiektów o własności ψ; nie są to jedyne przykłady języków z uogólnionymi kwantyfikatorami – bardziej ogólny przypadek (definicja Lindströma) obejmuje sytuacje, w których właściwie dowolna klasa struktur $\mathbb{K}$ wyznacza kwantyfikator $Q_{\mathbb{K}}$, związany z należeniem do tej klasy;
- języków *infinitarnych* $L_{\alpha\beta}$ (o koniunkcjach i alternatywach długości mniejszej od α oraz prefiksach kwantyfikatorowych długości mniejszej od β); język $L_{\infty\beta}$ dopuszcza koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej od β.

Oprócz ciekawostek dotyczących mocy wyrażania takich języków przypominamy też o niektórych własnościach systemów logicznych w tych językach (pisząc „logika L_{Q_α}" lub „logika $L_{\alpha\beta}$" mamy na myśli precyzyjnie określone w literaturze przedmiotu systemy logiczne w odnośnych językach):

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_0} z dokładnością do izomorfizmu. Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\ y < x$ (każda liczba ma jedynie skończenie wiele poprzedników).
- W (logice formułowanej w) L_{Q_0} nie zachodzi *Górne Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego*.
- L_{Q_0} nie jest (rekurencyjnie) *aksjomatyzowalna*.
- W L_{Q_0} nie zachodzi *Twierdzenie o zwartości*.
- W L_{Q_0} zachodzi *Dolne Twierdzenie Löwenheima-Skolema*.
- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla L_{Q_0} można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

$$\frac{\exists^{\geqslant 1} x\ \psi(x), \exists^{\geqslant 2} x\ \psi(x), \ldots}{Q_0 x\ \psi(x)}.$$

- L_{Q_0} jest fragmentem $L_{\omega_1\omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\ \psi(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n} x\ \psi(x).$$

  Zdanie $Q_0 x\ \psi(x)$ języka L_{Q_0} (istnieje nieskończenie wiele x o własności ψ) ma te same modele co następujące zdanie z $L_{\omega_1\omega}$:
  $\neg \bigvee\limits_{n\in\omega} \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall x\ (\psi(x) \rightarrow (x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_n))$.
- L_{Q_1} jest (!) aksjomatyzowalna.
- Pojęcie *dobrego porządku* nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne w $L_{\omega_1\omega_1}$ przez koniunkcję zdania charakteryzującego porządki liniowe oraz zdania:
  $(\forall x_n)_{n\in\omega} \exists x\ (\bigvee\limits_{n\in\omega} (x = x_n) \wedge \bigwedge\limits_{n\in\omega} (x \leqslant x_n))$.
- *Predykat prawdziwości* formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (*Twierdzenie Scotta*).

Gdy myśli się o ewentualnych zastosowaniach mocniejszych systemów logicznych w formalnych opisach działającego i poznającego podmiotu, to nasuwa się oczywiście pytanie o adekwatność przypisania owemu podmiotowi rozważanych mocy ekspresyjnych oraz dedukcyjnych. Nie jest to rzecz jasna problem ani matematyczny, ani logiczny, lecz raczej problem metodologiczny samych nauk kognitywnych.

Systemy logiczne można *porównywać* pod względem obu rozważanych w tym punkcie mocy. Warto może na zakończenie tego punktu dodać, iż znamy pewne prawidła dotyczące współwystępowania określonych własności metalogicznych. Zwykle przywołuje się w tym kontekście *I twierdzenie Lindströma*, głoszące, iż logika, w której mamy pełność (lub, równoważnie, zwartość) oraz twierdzenie Löwenheima-Skolema jest równoważna (co do „mocy wyrażania”, które to pojęcie jest oczywiście ściśle zdefiniowane) klasycznej logice pierwszego rzędu. W konsekwencji, logika mocniejsza od klasycznej, w której zachodzi twierdzenie Löwenheima-Skolema nie może być pełna, oraz, rzecz jasna, w żadnej pełnej logice mocniejszej od logiki pierwszego rzędu nie może zachodzić twierdzenie Löwenheima-Skolema.

5. Model zamierzony: pojęcie czysto pragmatyczne?

Czy zatem komponent pragmatyczny w wyróżnianiu modelu zamierzonego teorii jest niezbywalny? Musimy poprzestać na *nazwaniu* któregoś modelu *zamierzonym*, porzucając nadzieję na jego jednoznaczną charakterystykę w terminach syntaktycznych czy choćby semantycznych? Staraliśmy się przybliżyć czytelnikom odpowiedzi na te pytania, których udziela się we współczesnych podstawach matematyki. Podsumujmy:

- W słabych logikach, jak np. w logice pierwszego rzędu, ustalanie, który model teorii jest jej modelem zamierzonym odbywa się na poziomie metajęzyka. W logikach mocniejszych kategoryczność opisu bywa osiągana, ale kosztem zmniejszenia mocy dedukcyjnej.
- Zdarza się, że gdy pytamy o istotę, naturę, charakterystykę interesującego nas pojęcia: np. o naturę *ciągłości*, wyczerpującą charakterystykę pojęcia *liczby rzeczywistej*, to może być tak, iż ograniczenie się do jednego tylko aspektu takiej wyczerpującej charakterystyki nie daje. Widzieliśmy to na przykładzie twierdzeń charakteryzujących liczby rzeczywiste, gdzie odwoływano się do *kilku* ich aspektów, branych łącznie: arytmetycznego, porządkowego, topologicznego.
- Pytania o jednoznaczność modeli zamierzonych nabierają wagi jedynie w tych przypadkach, gdy mamy do czynienia z dziedzinami *nieskończonymi*. Problemy dotyczące modeli *skończonych* mogą być trudne *obliczeniowo*, jednak to dopiero próby nawiązania bliższego kontaktu z *Nieskończonym* stwarzają nowe jakościowo problemy natury logicznej.

Wypada może dodać, że *praktyka matematyczna* przywiązuje większą wagę do możliwości kategorycznego opisu badanych struktur niż do subtelności logicznych dotyczących mocy dedukcyjnej. Dowód *matematyczny* to pojęcie, które nie jest tożsame zakresowo z pojęciem dowodu *logicznego*. To drugie, znane czytelnikom z elementarnego kursu logiki, ma precyzyjną definicję. Natomiast to pierwsze nie jest tak precyzyjne, odwołuje się przede wszystkim do pojęcia wynikania logicznego, ale zawiera też komponenty natury socjologicznej. Dowód matematyczny jest uważany za *poprawny*, gdy zostaje zaakceptowany przez społeczność matematyków. Zdarzało się w przeszłości, że pewne metody dowodowe dopiero po wielkich dyskusjach zostały uznane za poprawne (tak rzecz się miała np. z wykorzystywaniem aksjomatu wyboru). Ale i obecnie bywa tak, że nie ma powszechnej zgody co do poprawności niektórych technik używanych w dowodach matematycznych; za przykład niech posłużą tu sytuacje, gdy dowód przeprowadzany jest automatycznie, przez program komputerowy i jest tak, że nikt z matematyków nie mógłby go samodzielnie sprawdzić, z powodów ograniczeń czysto biologicznych (umrze, zanim sprawdzi do końca).

Nawiązaniem do tej ostatniej sprawy zakończymy niniejszy odczyt. Otóż warto się może zastanowić nad radosnym i beztroskim szafowaniem terminem *dowolny zbiór (ciąg, obiekt, itd.) skończony.* Rozważane przez nas teorie mają zwykle bardzo skromną liczbę aksjomatów (lub schematów aksjomatów). Nie wydaje się rozsądne rozważanie pojęć, które definiowane byłyby przez, powiedzmy, setki miliardów warunków. Istnieją czysto biologiczne ograniczenia, jeśli chodzi np. o długość dowodu, który moglibyśmy sprawdzić. I tak dalej, stosowne przykłady można mnożyć. A jednak bezustannie igramy z nieskończonością aktualną, co więcej, bez niej prawie cała matematyka byłaby nie do pomyślenia. Nasze umysły z fizycznego punktu widzenia są skończone. Przypomnijmy, dla uciechy audytorium, jakie konkretnie ograniczenia wchodzą tu w grę. *Ograniczeniem Bekensteina* nazywamy górną granicę entropii S (lub informacji I), która może zostać zawarta w skończonym obszarze przestrzeni i która ma ograniczoną ilość energii. Równoważnie, jest to maksymalna ilość informacji potrzebna do precyzyjnego opisu takiego skończonego systemu fizycznego, aż do poziomu kwantowego. Odpowiednie formuły mają postać następującą:

$$S \leqslant \frac{2\pi k R E}{\hbar c},$$

gdzie k jest stałą Boltzmana, R jest promieniem kuli, w której można całkowicie zamknąć rozważany system, E jest jego całkowitą energią, $\hbar$ jest stałą Plancka, a c prędkością światła;

$$I = \frac{2\pi R E}{\hbar c \ln 2},$$

gdzie informacja I jest wyrażona jako liczba bitów zawartych w stanach kwantowych wewnątrz rozważanej kuli.

Dla przeciętnego mózgu ludzkiego (o wadze 1.5 kg oraz objętości 1260 cm^3) wartość prawej strony w drugiej z tych nierówności wynosi $2.58991 \cdot 10^{42}$ bitów. Oznacza to m.in., że liczba możliwych różnych stanów ludzkiego mózgu wynosi co najwyżej $10^{7.79640 \cdot 10^{41}}$. Cóż, niemała to liczba (w porównaniu z wielkością naszej pensji, dla przykładu), ale jest to przecie liczba *skończona* i od niej do *nieskończoności* jest dokładnie tak samo daleko, jak od liczby 0.

Nieskończoność aktualna jest swobodnym wytworem ludzkiego umysłu, przyciąga naszą uwagę, budzi tęsknoty, których nie obawiamy się otwarcie wyrażać, nawet jeśli Święte Oficjum grozi nam za to stosem:

> *Będąc człowiekiem, nie jesteś bliższy nieskończoności, niż gdybyś był mrówką. Ale też nie jesteś dalszy, niż gdybyś był ciałem niebieskim.*

Literatura

Awodey, S., Reck, E.H. (2002). Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic. *History and Philosophy of Logic* 23, 1–30.

Awodey, S., Reck, E.H. (2002). Completeness and Categoricity. Part II: Twentieth-century Metalogic to Twenty-first-Century Semantics. *History and Philosophy of Logic* 23, 77–94.

Baer, R. (1928). Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift* 27, 536–539.

Baldus, R. (1928). Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom. *Mathematische Annalen* 100, 321–333.

Błaszczyk, P. (2007). *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda "Stetigkeit und irrationale Zahlen"*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.

Borsuk, K., Szmielew, W. (1975). *Podstawy geometrii.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Bukovský, L. (1979). *Štruktúra reálnej osi.* Bratislava: VEDA, Vydavatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied.

Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5, 123–132.

Cantor, G. (1883). Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* 21, 545–586.

Carnap, R., Bachmann, F. (1936). Über Extremalaxiome. *Erkenntnis* 6, 166–188.

Corcoran, J. (1980). Categoricity. *History and Philosophy of Logic*, vol. 1, 187–207.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen*? Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

Feferman, S., Friedman, H.M., Maddy, P., Steel, J.R. (2000). Does mathematics need new axioms? *The Bulletin of Symbolic Logic* 6(4), 401–446.

Fraenkel, A. (1928). *Einleitung in die Mengenlehre.* Berlin: Verlag von Julius Springer.

Fraenkel, A., Bar Hillel, Y., Levy, A. (1973). *Foundations of set theory.* Amsterdam London: North-Holland Publishing Company.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Wilhelm Koebner.

Gödel, K. (1940). The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. Princeton: *Annals of Mathematics Studies* 3.

Grassmann, H. (1861). *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Erster Theil: Arithmetik.* Berlin: Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin (Adolph Enslin).

Grzegorczyk, A. 1962. On the concept of categoricity. *Studia Logica* 13, 39–66.

Heine, H. (1872). Elemente der Functionenlehre. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 74, 172–188.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner.

Hilbert, D. (1900). Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8, 180-184.

Hintikka, J. (1986). Extremality assumptions in the Foundations of Mathematics. *Philosophy of Science Association*, 2, 247–252.

Hintikka, J. (1991). Carnap, the universality of language and extremality axioms. *Erkenntnis* 35, 325–336.

Kanamori, A. (1994). *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Berlin: Springer-Verlag.

Koellner, P. (2010). Independence and Large Cardinals. *Stanford Encyklopedia of Philosophy.*

http://plato.stanford.edu/entries/independence-large-cardinals/

Luzin, N. (1930). *Leçons sur les ensembles analytiques.* Paris: Gauthier-Villars.

Méray, Ch. (1869). Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites a des variables données. Paris: *Revue des Sociétés savantes*, Bibliothéque impériale 4.

Mioduszewski, J. (1996). *Ciągłość. Szkice z historii matematyki.* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Mostowski, A. (1967). O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* 20, 99–116.

Myhill, J. (1952). The hypothesis that all classes are nameable. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 38, 979.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia nova methodo exposita.* Torino: Bocca.

Putnam, H. (1980). Models and reality. *The Journal of Symbolic Logic* 45, 464–482.

Suszko, R. (1951). Canonic axiomatic systems. *Studia Philosophica* IV, 301–330.

Tarski, A., Lindenbaum, A. (1936). Über die Beschränkheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 7, 15–22.

Tennant, N. (2000). Deductive versus Expressive Power: a Pre-Gödelian Predicament. *Journal of Philosophy* 97, 257–277.

Weaver, G., George, B. (2002). Quasi-finitely Characterizable and Finitely Characterizable Dedekind Algebras. *Bulletin of the Section of Logic* 31, 145–157.

Weaver, G., George, B. (2003). The Fraenkel-Carnap Question for Dedekind Algebras. *Mathematical Logic Quarterly* 49, 92–96.

Weaver, G., George, B. (2005). Fraenkel-Carnap Properties. *Mathematical Logic Quarterly* 51, 285–290.

Weber, H. (1898). *Lehrbuch der Algebra*. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

Woleński, J. (1993). *Metamatematyka a epistemologia*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Mathematische Annalen* 65, 261–281.

Zermelo, E. (1930). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae* 16, 29–47.